2014

DEEC – Área Científica de Telecomunicações
Instituto Superior Técnico

Propagação & Antenas
Prof. Carlos R. Paiva

INTRODUÇÃO AOS GUIAS DE ONDA

Nestes apontamentos faz-se uma pequena *introdução* ao estudo dos *guias de onda*. Consideram-se, apenas, os casos mais simples do ponto de vista geométrico.

Todas as estruturas são rectangulares – no sentido em que, para a aplicação das condições fronteira, o sistema de coordenadas mais apropriado é o das coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z). Além disso, a estrutura do guia é sempre *uniforme* e *ilimitada* ao longo da coordenada y. As ondas electromagnéticas propagam-se, longitudinalmente, no sentido positivo do eixo z. Desprezam-se as perdas (quer nos condutores quer nos dieléctricos) e, portanto, a constante de propagação longitudinal β é real e positiva. A variação temporal adoptada é do tipo $\exp(-i\,\omega t)$. Assim, todas as componentes do campo electromagnético têm o seguinte factor de propagação:

$$\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right].$$

Note-se que o que se mede *directamente*, no laboratório, são quantidades reais (e não números complexos). Assim, subentende-se – sempre – que as grandezas mensuráveis correspondem à parte real. Por exemplo: quando se escreve

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right],$$

onde o vector $\mathbf{E}(x) \in \mathbb{C}^3$ é um vector complexo, com

$$\mathbf{E}(x) = E_x(x)\,\mathbf{e}_1 + E_y(x)\,\mathbf{e}_2 + E_z(x)\,\mathbf{e}_3,$$

subentende-se que, na realidade, se tem

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \Re\left\{\mathbf{E}(x)\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right]\right\} \\
&= \left[E_x'(x)\cos(\beta z - \omega t) - E_x''(x)\sin(\beta z - \omega t)\right]\mathbf{e}_1 \\
&\quad + \left[E_y'(x)\cos(\beta z - \omega t) - E_y''(x)\sin(\beta z - \omega t)\right]\mathbf{e}_2 \\
&\quad + \left[E_z'(x)\cos(\beta z - \omega t) - E_z''(x)\sin(\beta z - \omega t)\right]\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

em que, com $\mathbf{E}'(x), \mathbf{E}''(x) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}'(x) + i\,\mathbf{E}''(x) = \left[E_x'(x) + i\,E_x''(x)\right]\mathbf{e}_1 + \left[E_y'(x) + i\,E_y''(x)\right]\mathbf{e}_2 + \left[E_z'(x) + i\,E_z''(x)\right]\mathbf{e}_3.$$

Isto significa que a *velocidade de fase* é

$$\boxed{v_p = \frac{\omega}{\beta}} \quad \mapsto \quad \beta z - \omega t = \beta\left(z - \frac{\omega}{\beta} t\right) = \beta\left(z - v_p t\right), \qquad \beta z - \omega t = -\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right) = -\omega\left(t - \frac{z}{v_p}\right).$$

No vaso da *propagação no vácuo*, tem-se simplesmente

$$\boxed{\beta = k_0} \quad \mapsto \quad \boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\,.$$

Sendo λ o comprimento de onda medido no vácuo e λ_g o comprimento de onda dentro do guia, é

$$\begin{cases} k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi f}{c} \\ \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda_g} = \dfrac{\omega}{v_p} = \dfrac{2\pi f}{v_p} \end{cases} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{array}{c} c = \lambda f \\ v_p = \lambda_g f \end{array}}\,.$$

Define-se, então, o chamado *índice de refracção modal* (ou índice de refracção efectivo), $\overline{n}$, tal que

$$\boxed{\overline{n} = \frac{\beta}{k_0}} \quad \mapsto \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_0}\frac{k_0}{\beta} = \frac{c}{\beta/k_0} \quad \mapsto \quad \boxed{v_p = \frac{c}{\overline{n}}}\,.$$

Portanto, tem-se

$$\boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{\overline{n}}}\,.$$

A *velocidade de grupo*, por sua vez, é dada por

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\dfrac{d\beta}{d\omega}}}\,.$$

Porém, atendendo a que

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\beta}{dk_0}\frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{d\beta}{dk_0}\,,$$

define-se, ainda, o chamado *índice de grupo*, n_g, tal que

$$\boxed{n_g = \frac{d\beta}{dk_0}}\,.$$

Nesta condições, será

$$v_g = \frac{1}{\dfrac{d\beta}{d\omega}} = \frac{c}{\dfrac{d\beta}{d k_0}} \quad \mapsto \quad \boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}\,.$$

Note-se que, deste modo, se tem (em geral)

$$\boxed{v_p\, v_g = \frac{c^2}{\bar{n}\, n_g}}\,.$$

Tendo em consideração que $\beta = \bar{n}\, k_0$, infere-se que

$$n_g = \frac{d\beta}{d k_0} = \frac{d}{d k_0}\left(\bar{n}\, k_0\right) \quad \mapsto \quad \boxed{n_g = \bar{n} + k_0 \frac{d\bar{n}}{d k_0}}\,.$$

Como se tem

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \mapsto \quad \frac{d\omega}{d k_0} = c, \quad \frac{d\lambda}{d k_0} = -\frac{2\pi}{k_0^2} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\,,$$

é, ainda,

$$\boxed{n_g = \bar{n} + k_0 \frac{d\bar{n}}{d k_0} = \bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega} = \bar{n} - \lambda \frac{d\bar{n}}{d\lambda}}\,.$$

Mas então, conclui-se que

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \frac{c}{\bar{n} - \lambda \dfrac{d\bar{n}}{d\lambda}} = \frac{c/\bar{n}}{1 - \dfrac{\lambda}{\bar{n}} \dfrac{d\bar{n}}{d\lambda}} \quad \mapsto \quad \boxed{v_g = \frac{v_p}{1 - \dfrac{\lambda}{\bar{n}} \dfrac{d\bar{n}}{d\lambda}}}\,.$$

Esta última expressão mostra que

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} = 0 \quad \mapsto \quad \boxed{v_g = v_p}\,.$$

Porém,

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} < 0 \quad \mapsto \quad 1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda} > 1 \quad \mapsto \quad \boxed{v_g < v_p}\,,$$

e, por outro lado,

$$\frac{d\bar{n}}{d\lambda} > 0 \quad \mapsto \quad 1 - \frac{\lambda}{\bar{n}} \frac{d\bar{n}}{d\lambda} < 1 \quad \mapsto \quad \boxed{v_g > v_p}\,.$$

Define-se o *coeficiente de dispersão* de um guia de ondas como sendo o coeficiente D, tal que

$$D = \frac{1}{L}\frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{1}{L}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{L}{v_g}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right) \quad \mapsto \quad \boxed{D = -\frac{1}{v_g^2}\frac{d v_g}{d\lambda}},$$

onde $\tau_g = L/v_g$ representa o *atraso de grupo* para um guia de comprimento L. Uma forma alternativa para escrever o coeficiente de dispersão é a seguinte:

$$D = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{v_g}\right) = \frac{1}{c}\frac{d n_g}{d\lambda} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\lambda}\left(\bar{n} - \lambda\frac{d\bar{n}}{d\lambda}\right) \quad \mapsto \quad \boxed{D = -\frac{\lambda}{c}\frac{d^2\bar{n}}{d\lambda^2}}.$$

Com efeito, tem-se

$$\frac{d n_g}{d\lambda} = -\lambda\frac{d^2\bar{n}}{d\lambda^2}.$$

As quatro equações de Maxwell

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = \varrho \end{cases}$$

serão sempre aplicadas, em tudo o que se segue, a regiões sem fontes do campo, i.e., em que se tenham, simultaneamente,

$$\varrho = 0, \qquad \mathbf{J} = 0.$$

Além disso, admite-se que a variação temporal é (como já se disse atrás), exclusivamente, do tipo

$$\exp(-i\omega t).$$

Daqui decorre, portanto, que se tem

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \quad \mapsto \quad -i\omega}.$$

Nestas condições, as quatro equações de Maxwell reescrevem-se na forma simplificada

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\times\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D} \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \end{cases}$$

Porém, todas as estruturas analisadas nestes apontamentos são ilimitadas e uniformes ao longo de y. Por essa razão o operador «nabla»

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

reduz-se à forma

$$\boxed{\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + i\,\beta\,\mathbf{e}_3}\ .$$

Com efeito, as estruturas também são uniformes e ilimitadas ao longo do eixo z. A única diferença é que se considera que esta é a *direcção longitudinal de propagação*, i.e., todas as componentes do campo electromagnético variam com a coordenada z de acordo com a expressão

$$\exp(i\,\beta\,z)\ .$$

Logo, é também possível fazer sempre

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \quad \mapsto \quad i\,\beta}\ ,$$

assim se explicando a forma como se escreveu anteriormente o operador ∇.

Vejamos, então, como converter as duas equações de Maxwell (dos rotacionais) num conjunto de equações escalares. Seja $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_1 + A_y\,\mathbf{e}_2 + A_z\,\mathbf{e}_3$ um vector qualquer. Admitamos, ainda, que se tem

$$\begin{cases} A_x(x,y,z,t) = A_x(x)\exp(i\,\beta\,z)\exp(-i\,\omega t) \\ A_y(x,y,z,t) = A_y(x)\exp(i\,\beta\,z)\exp(-i\,\omega t) \\ A_z(x,y,z,t) = A_z(x)\exp(i\,\beta\,z)\exp(-i\,\omega t) \end{cases}$$

de modo que

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & i\,\beta \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(-i\,\beta\,A_y\right)\mathbf{e}_1 + \left(i\,\beta\,A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\mathbf{e}_3\ .$$

Ou seja, tem-se:

$$\boxed{\begin{aligned} (\nabla\times\mathbf{A})_x &= -i\,\beta\,A_y \\ (\nabla\times\mathbf{A})_y &= i\,\beta\,A_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ (\nabla\times\mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{aligned}}\;.$$

Isto implica, portanto, que

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{E} = i\,\omega\,\mathbf{B}} \;\mapsto\; \boxed{\begin{aligned} -i\,\beta\,E_y &= i\,\omega\,B_x \\ i\,\beta\,E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\,\omega\,B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= i\,\omega\,B_z \end{aligned}}$$

e, ainda, que

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{H} = -i\,\omega\,\mathbf{D}} \;\mapsto\; \boxed{\begin{aligned} -i\,\beta\,H_y &= -i\,\omega\,D_x \\ i\,\beta\,H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -i\,\omega\,D_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -i\,\omega\,D_z \end{aligned}}\;.$$

Todos os meios que se irão considerar nestes apontamentos são meios isotrópicos sem acoplamento magneto-eléctrico. Mais precisamente, supõe-se que todos os meios observam relações constitutivas da forma

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon(x)\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0\,\mu(x)\,\mathbf{H} \end{cases}$$

mas onde as funções $\varepsilon(x)$ e $\mu(x)$ são sempre constantes por troços (ou regiões).

Infere-se, assim, que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{aligned} & -i\beta E_y = i\omega\mu_0\mu(x) H_x \\ & i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu(x) H_y \\ & \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu(x) H_z \end{aligned}} ,$$

pelo que

$$-i\beta E_y = i\omega\mu_0\mu(x) H_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0\,\mu(x)} E_y} ,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega\mu_0\mu(x) H_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{H_z = -i\,\frac{1}{\omega\mu_0\,\mu(x)} \frac{\partial E_y}{\partial x}} .$$

Analogamente, obtém-se

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{aligned} & -i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x) E_x \\ & i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x) E_y \\ & \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x) E_z \end{aligned}} ,$$

pelo que

$$-i\beta H_y = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x) E_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_x = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)} H_y} ,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(x) E_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_z = i\,\frac{1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x}} .$$

Podemos, então, falar em duas classes distintas de soluções: (i) modos TE (*transverse electric*); (ii) modos TM (*transverse magnetic*). No primeiro caso (modos TE) não existe componente longitudinal do campo eléctrico, i.e., tem-se $E_z = 0$. No segundo caso (modos TM) não existe componente longitudinal do campo magnético, i.e., tem-se $H_z = 0$. Mas, como acabou de se ver, as únicas componentes do campo electromagnético que, nos modos TE, não são identicamente nulas são

$\mathbf{TE} \to \left(E_y, H_x, H_z\right)$.

No caso dos modos TM, as únicas componentes do campo electromagnético que não identicamente nulas são

$\mathbf{TM} \to \left(H_y, E_x, E_z\right)$.

No caso dos modos TE foi possível determinar as componentes magnéticas $\left(H_x, H_z\right)$ em função da componente (dita de) suporte E_y. No caso dos modos TM foi possível determinar as componentes eléctricas $\left(E_x, E_z\right)$ em função da componente de suporte H_y. Resta, em cada caso, determinar as respectivas componentes de suporte: (i) E_y, nos modos TE; (ii) H_y, nos modos TM. Para o fazer basta ter em consideração as duas equações ainda não utilizadas.

No caso dos modos TE, tem-se

$$i\,\beta\,H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\,i\,\omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon\left(x\right)E_y$$

$$\therefore \quad i\,\beta\left[-\frac{\beta}{\omega\,\mu_0\,\mu\left(x\right)}\,E_y\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[-\,i\,\frac{1}{\omega\,\mu_0\,\mu\left(x\right)}\,\frac{\partial E_y}{\partial x}\right] = -\,i\,\omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon\left(x\right)E_y\,.$$

Logo, para cada região em que $\mu\left(x\right)$ é uma constante, obtém-se

$$-\,\beta^2 E_y + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\,\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon\left(x\right)\mu\left(x\right)E_y\,.$$

Como

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}}$$

é a velocidade da luz (ou da radiação electromagnética) no vácuo (ou, aproximadamente, no ar), podemos escrever (para a constante de propagação no vácuo)

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}\,,$$

de forma que a equação diferencial para a componente de suporte E_y é dada por

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{MODOS}\\ \textbf{TE}\end{array}} \mapsto \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] E_y = 0}\,.$$

Nesta última equação diferencial introduziu-se o *índice de refracção*

$$\boxed{n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)\,\mu(x)}}$$

de cada região (onde as funções $\varepsilon(x)$ e $\mu(x)$ assumem valores constantes). Tal como as constantes relativas $\varepsilon(x)$ e $\mu(x)$, o correspondente índice de refracção $n(x)$ é um número adimensional. Admite-se que $\varepsilon(x), \mu(x) \in \mathbb{R}$ e, mais precisamente, que $\varepsilon(x) > 0$ e $\mu(x) > 0$.

No caso dos modos TM, tem-se

$$i\,\beta\,E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\,\omega\,\mu_0\,\mu(x)\,H_y$$

$$\therefore \quad i\,\beta\left[\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,H_y\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[i\,\frac{1}{\omega\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,\frac{\partial H_y}{\partial x}\right] = i\,\omega\,\mu_0\,\mu(x)\,h_y\,.$$

Logo, para cada região em que $\varepsilon(x)$ é uma constante, obtém-se

$$\beta^2 H_y - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = -\,\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon(x)\,\mu(x)\,H_y$$

ou, ainda,

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{MODOS}\\ \textbf{TM}\end{array}} \mapsto \boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] H_y = 0}\,.$$

O objectivo fundamental da análise de um dado *guia de ondas* consiste na determinação da respectiva *equação modal*. É esta equação, que resulta da aplicação das *condições fronteira*, que vai permitir determinar quais as soluções admissíveis (i.e., quais os *modos*) que se podem propagar ao longo da direcção longitudinal (eixo z) da estrutura do guia. Basicamente a equação modal diz-nos – para cada valor da frequência – qual o valor da constante de propagação longitudinal β correspondente, i.e., qual o correspondente valor de $\beta = \beta(\omega)$.

$$\boxed{\omega} \mapsto \boxed{\textbf{EQUAÇÃO MODAL}} \mapsto \boxed{\beta}$$

Como $k_0 = \omega / c$, este processo (da equação modal) equivale a determinar o índice de refracção modal $\bar{n}$ a partir do conhecimento do valor de k_0.

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}} \mapsto \boxed{\textbf{EQUAÇÃO MODAL}} \mapsto \boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0}}$$

<u>MODOS TE</u>

$$E_z = 0, \quad \left(E_y, H_x, H_z\right)$$

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\mu_0\,\mu(x)} E_y \\ H_z = -i\,\dfrac{1}{\omega\mu_0\,\mu(x)}\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad \to \quad \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] E_y = 0}$$

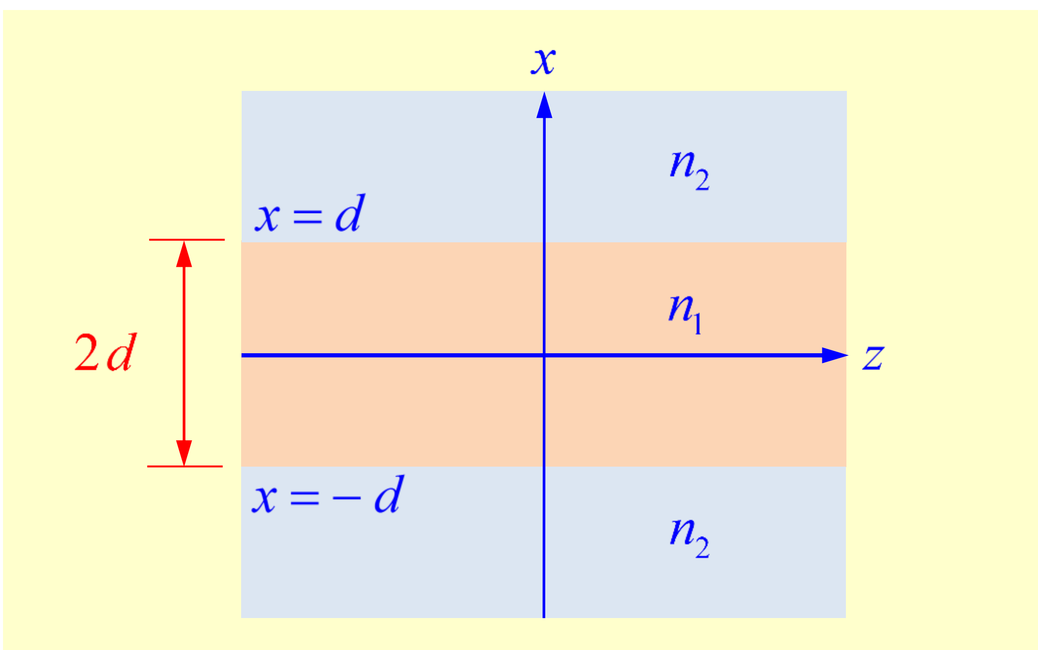
MODOS TM

$$H_z = 0, \quad \left(H_y, E_x, E_z\right)$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} H_y \\ E_z = i \dfrac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon(x)} \dfrac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x) k_0^2 - \beta^2\right] H_y = 0}$$

Placa Dieléctrica Simétrica

A placa dieléctrica simétrica, que se analisa agora, é um guia aberto. Encontra-se representada na figura anexa.



A placa tem espessura $2d$ e um índice de refracção n_1. O meio envolvente, por sua vez, tem um índice de refracção n_2 (com $n_2 < n_1$). As relações constitutivas podem, então, ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon(x)\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H} \end{cases} \quad \mapsto \quad \varepsilon(x) = n^2(x) = \begin{cases} n_1^2, & |x| \le d, \\ n_2^2, & |x| > d. \end{cases}$$

Neste guia propagam-se modos TE e TM. Para os modos TE as únicas componentes não nulas são (E_y, H_x, H_z). Para os modos TM as únicas componentes não nulas são (H_y, E_x, E_z). No caso dos modos TE, vem

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\,\mu_0}\,E_y \\ H_z = -i\,\dfrac{1}{\omega\,\mu_0}\,\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] E_y = 0}$$

enquanto que, para os modos TM,

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\beta}{\omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,H_y \\ E_z = i\,\dfrac{1}{\omega\,\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,\dfrac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \left[n^2(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] H_y = 0}\,.$$

A escrita das equações diferenciais para as componentes de suporte (E_y nos modos TE e H_y nos modos TM) fica muito simplificada através da introdução das seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{cases} h^2 = n_1^2\,k_0^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 = \beta^2 - n_2^2\,k_0^2 \end{cases} \quad \mapsto \quad \boxed{h^2 + \alpha^2 = \left(n_1^2 - n_2^2\right) k_0^2}\,.$$

Enquanto h representa a constante de propagação transversal dentro da placa (i.e., para $-d \le x \le d$) , α representa a constante de atenuação transversal fora da placa (i.e., para $x < -d$ e para $x > d$). Assim, e.g., no caso dos modos TE, a equação diferencial para a componente E_y assume as seguintes formas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + h^2\,E_y = 0, & |x| \le d \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \alpha^2\,E_y = 0, & |x| > d \end{cases}$$

dentro e fora da placa dieléctrica. Em ambos os casos podemos ensaiar soluções da forma

$$E_y = E_0 \exp(s\,x) \quad \mapsto \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = s\,E_0 \exp(s\,x) \quad \mapsto \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = s^2 E_0 \exp(s\,x).$$

Logo, dentro da placa, tem-se

$$s^2 E_0 \exp(s\,x) + h^2 E_0 \exp(s\,x) = 0 \quad \mapsto \quad s^2 + h^2 = 0 \quad \mapsto \quad \boxed{s = \pm\, i\,h}\,.$$

Por sua vez, fora da placa, vem

$$s^2 E_0 \exp(s\,x) - \alpha^2 E_0 \exp(s\,x) = 0 \quad \mapsto \quad s^2 - \alpha^2 = 0 \quad \mapsto \quad \boxed{s = \pm\,\alpha}\,.$$

Assim, no interior da placa, o campo eléctrico é uma combinação linear da forma

$$\begin{aligned} E_y &= C_1 \exp(i\,h\,x) + C_2 \exp(-i\,h\,x) \\ &= C_1\left[\cos(h\,x) + i\sin(h\,x)\right] + C_2\left[\cos(h\,x) - i\sin(h\,x)\right] \\ &= (C_1 + C_2)\cos(h\,x) + i\,(C_1 - C_2)\sin(h\,x) \end{aligned}$$

ou, introduzindo

$$\begin{cases} \mathsf{A} = C_1 + C_2, \\ \mathsf{A}' = i\,(C_1 - C_2), \end{cases}$$

vem, ainda,

$$E_y = \mathsf{A}\cos(h\,x) + \mathsf{A}'\sin(h\,x), \quad -d \le x \le d\,.$$

No exterior da placa, por sua vez, o campo eléctrico é uma combinação linear da forma

$$E_y = \mathsf{B}\exp(-\alpha\,x) + \mathsf{C}\exp(\alpha\,x), \quad |x| > d\,.$$

Porém, as ondas guiadas pela placa têm de ser *ondas superficiais*. Isto significa que se devem verificar as seguintes condições no infinito:

$$\lim_{x\to\infty} E_y = \lim_{x\to-\infty} E_y = 0\,.$$

Assim, para $x > d$, deve ter-se $\mathsf{C} = 0$ e, para $x < -d$, deve ter-se $\mathsf{B} = 0$. Portanto, em síntese, deve ter-se (modos TE):

$$E_y = \begin{cases} \mathsf{B}\exp(-\alpha x), & x > d, \\ \mathsf{A}\cos(hx) + \mathsf{A}'\sin(hx), & -d \le x \le d, \\ \mathsf{C}\exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$

Existe, ainda, uma informação importante acerca da estrutura do guia a ter em consideração: a placa dieléctrica é simétrica. Esta informação permite definir duas classes distintas de modos (ou soluções): modos pares e modos ímpares. Definiremos os *modos pares* como aqueles para os quais se tem

$$E_y(-x) = E_y(x).$$

No caso dos *modos ímpares*, considera-se que

$$E_y(-x) = -E_y(x).$$

Consequentemente, no caso dos modos pares, faz-se $\mathsf{A}' = 0$ e, no caso dos ímpares, faz-se $\mathsf{A} = 0$.

Podemos resumir toda esta análise, escrevendo o que se segue.

MODOS **TE** PARES

$$E_y = \begin{cases} \mathsf{B}\exp(-\alpha x), & x > d, \\ \mathsf{A}\cos(hx), & -d \le x \le d, \\ \mathsf{C}\exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$

MODOS **TE** ÍMPARES

$$E_y = \begin{cases} \mathsf{B}\exp(-\alpha x), & x > d, \\ \mathsf{A}'\sin(hx), & -d \le x \le d, \\ \mathsf{C}\exp(\alpha x), & x < -d. \end{cases}$$

Como nos modos TE se tem

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \\ H_z = -i \dfrac{1}{\omega\mu_0} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

infere-se que

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} \times \begin{cases} \mathsf{B} \exp(-\alpha x), & x > d, \\ \mathsf{A} \cos(h x), & -d \le x \le d, \\ \mathsf{C} \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE pares, enquanto que

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} \times \begin{cases} \mathsf{B} \exp(-\alpha x), & x > d, \\ \mathsf{A}' \sin(h x), & -d \le x \le d, \\ \mathsf{C} \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE ímpares. De forma análoga, vem

$$H_z = -i \frac{1}{\omega\mu_0} \times \begin{cases} -\alpha \mathsf{B} \exp(-\alpha x), & x > d, \\ -h \mathsf{A} \sin(h x), & -d \le x \le d, \\ \alpha \mathsf{C} \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE pares e

$$H_z = -i \frac{1}{\omega\mu_0} \times \begin{cases} -\alpha \mathsf{B} \exp(-\alpha x), & x > d, \\ h \mathsf{A}' \cos(h x), & -d \le x \le d, \\ \alpha \mathsf{C} \exp(\alpha x), & x < -d, \end{cases}$$

para os modos TE ímpares.

Para determinar a *equação modal* deste guia aberto há que aplicar, de seguida, as condições fronteira. Porém, dada a simetria da estrutura, apenas temos que considerar uma das interfaces, e.g., a interface $x = d$ (a interface $x = -d$ levaria a resultados que seriam redundantes). Ora, neste caso, as condições fronteira na interface superior impõem as duas seguintes continuidades (i.e., a continuidade das componentes tangenciais de $\mathbf{E}$ e de $\mathbf{H}$):

$$\begin{cases} E_y\left(x=d^-\right)=E_y\left(x=d^+\right), \\ H_z\left(x=d^-\right)=H_z\left(x=d^+\right). \end{cases}$$

Vejamos, então, quais as *equações modais* que se obtêm pela aplicação destas duas condições. No caso dos modos TE pares, obtém-se

$$\begin{cases} \mathsf{A}\cos\left(h\,d\right)=\mathsf{B}\exp\left(-\alpha\,d\right) \\ -h\,\mathsf{A}\sin\left(hd\right)=-\alpha\,\mathsf{B}\exp\left(-\alpha\,d\right) \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \cos\left(h\,d\right) & -\exp\left(-\alpha\,d\right) \\ -h\sin\left(hd\right) & \alpha\exp\left(-\alpha\,d\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução trivial (i.e., com $\mathsf{A}=\mathsf{B}=0$) não tem interesse físico. Apenas nos interessa a solução não trivial. Porém, isso implica o anulamento do determinante da matriz de segunda ordem:

$$\det\begin{pmatrix} \cos\left(h\,d\right) & -\exp\left(-\alpha\,d\right) \\ -h\sin\left(hd\right) & \alpha\exp\left(-\alpha\,d\right) \end{pmatrix}=\alpha\exp\left(-\alpha\,d\right)\cos\left(h\,d\right)-h\exp\left(-\alpha\,d\right)\sin\left(hd\right)=0\,.$$

Mas então, daqui decorre que deverá ter-se

$$\alpha\cos\left(h\,d\right)=h\sin\left(hd\right) \quad \mapsto \quad \boxed{\alpha=h\tan\left(h\,d\right)}\,.$$

Esta última equação corresponde, portanto, à equação modal dos modos TE pares. De forma análoga, a equação modal dos modos TE ímpares é

$$\boxed{\alpha=-h\cot\left(h\,d\right)}\,.$$

Para os modos TM a única diferença reside na aplicação das condições fronteira:

$$\begin{cases} H_y\left(x=d^-\right)=H_y\left(x=d^+\right), \\ E_z\left(x=d^-\right)=E_z\left(x=d^+\right). \end{cases}$$

As correspondentes equações modais são as seguintes.

$$\left[\begin{array}{lcl} \text{Modos } \textbf{TM} \text{ pares} & \rightarrow & \boxed{\alpha=\dfrac{n_2^2}{n_1^2}\,h\tan\left(h\,d\right)} \\ \text{Modos } \textbf{TM} \text{ ímpares} & \rightarrow & \boxed{\alpha=-\dfrac{n_2^2}{n_1^2}\,h\cot\left(h\,d\right)} \end{array}\right.$$

Para facilitar a resolução das equações modais é costume introduzir um conjunto de variáveis normalizadas (adimensionais). A saber:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= h\,d \\ w &= \alpha\,d \\ v &= k_0\,d\,\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned}}\,.$$

Assim, vem

$$\begin{cases} u^2 = n_1^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \\ w^2 = \beta^2 d^2 - n_2^2 k_0^2 d^2 \end{cases} \quad \mapsto \quad \boxed{\begin{aligned} u^2 &= \left(k_0\,d\right)^2 \left(n_1^2 - \bar{n}^2\right) \\ w^2 &= \left(k_0\,d\right)^2 \left(\bar{n}^2 - n_2^2\right) \end{aligned}} \quad \mapsto \quad \boxed{u^2 + w^2 = v^2}\,.$$

A variável v é designada por *frequência normalizada* da placa dieléctrica. Também se costuma introduzir a variável b, que se designa por índice de refracção modal normalizado, tal que

$$\boxed{b = 1 - \frac{u^2}{v^2} = \frac{w^2}{v^2} = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}\,.$$

Para qualquer modo superficial tem-se

$$\boxed{n_2\,k_0 \le \beta < n_1\,k_0} \quad \mapsto \quad \boxed{n_2 \le \bar{n} < n_1} \quad \mapsto \quad \boxed{0 \le b < 1}\,.$$

Com efeito, ao contrário de um guia fechado, o mecanismo de corte num guia aberto – como a placa dieléctrica simétrica – é determinado pela *reflexão interna total*. Assim, num guia fechado, o corte corresponde a $\beta = 0$. Por sua vez, na placa dieléctrica simétrica, o corte corresponde a $\beta = n_2\,k_0$. À medida que a frequência aumenta, o campo electromagnético fica, cada vez mais, concentrado no interior da placa dieléctrica (i.e., na região $-d \le x \le d$). Assim, tem-se:

$$\lim_{v\to\infty} \beta = n_1\,k_0 \quad \mapsto \quad \lim_{v\to\infty} \bar{n} = n_1 \quad \mapsto \quad \lim_{v\to\infty} b = 1\,.$$

Note-se que, dado o valor de b, vem

$$\boxed{\begin{aligned} u &= v\,\sqrt{1-b} \\ w &= v\,\sqrt{b} \end{aligned}}\,.$$

Com estas variáveis normalizadas adimensionais, as equações modais das quatro classes distintas de modos escrevem-se como se indica de seguida.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Modos } \textbf{TE} \text{ pares} & \mapsto & w = u\tan(u) \\ \text{Modos } \textbf{TE} \text{ ímpares} & \mapsto & w = -u\cot(u) \\ \text{Modos } \textbf{TM} \text{ pares} & \mapsto & w = \dfrac{n_2^2}{n_1^2}\,u\tan(u) \\ \text{Modos } \textbf{TM} \text{ ímpares} & \mapsto & w = -\dfrac{n_2^2}{n_1^2}\,u\cot(u) \end{array}}$$

Do ponto de vista numérico, a resolução de uma dada equação modal corresponde, então, a determinar um dado valor de u para um certo valor da frequência normalizada v. O comportamento electromagnético deste guia depende, essencialmente, do contraste dieléctrico entre as duas regiões (interior e exterior da placa). Por essa razão, define-se formalmente o *contraste dieléctrico* como sendo

$$\boxed{\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2\,n_1^2}}\,.$$

Logo, dado que se tem $\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1\sqrt{2\Delta}$, a frequência normalizada da placa pode ser reescrita na forma

$$\boxed{v = (k_0 d)\,n_1\sqrt{2\Delta}}\,.$$

Assim, tendo em consideração que

$$n_1^2\,(k_0 d)^2 = \frac{v^2}{2\Delta} \quad \mapsto \quad u^2 = \left(n_1^2 - \overline{n}^2\right)(k_0 d)^2 = \left(\frac{n_1^2 - \overline{n}^2}{n_1^2}\right)\left(\frac{v^2}{2\Delta}\right),$$

infere-se que

$$\boxed{\overline{n} = n_1\sqrt{1 - 2\Delta\left(\frac{u}{v}\right)^2}}\,.$$

As duas classes de modos TE (pares e ímpares) podem ser designadas, genericamente, como modos TE_m desde que se faça: (i) $m = 0, 2, 4, \ldots$ (i.e., m par), no caso dos modos TE pares; (ii) $m = 1, 3, 5, \ldots$ (i.e., m ímpar), no caso dos modos TE ímpares. Como

$$\begin{cases} \tan\left(u - m\,\dfrac{\pi}{2}\right) = \tan(u), & m \ \text{par} \\ \tan\left(u - m\,\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot(u), & m \ \text{ímpar} \end{cases}$$

as duas equações modais das duas classes de modos TE podem ser unificadas na forma

$$\boxed{\text{Modos } \mathbf{TE}} \quad \mapsto \quad \boxed{\tan\left(u - m\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2}} \,.$$

Com efeito, o segundo membro desta equação corresponde a w/u. Já no caso dos modos TM, a unificação das duas classes de modos corresponde a

$$\boxed{\text{Modos } \mathbf{TM}} \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{n_2^2}{n_1^2}\tan\left(u - m\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2}} \,.$$

Estas duas equações unificadas prestam-se a uma interpretação geométrica da determinação da solução das equações modais. Com efeito as soluções gráficas resultam, então, da intersecção entre duas famílias de curvas: (i) as curvas que representam o lado esquerdo,

$$f_m^{\mathbf{TE}}(u) = \tan\left(u - m\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad f_m^{\mathbf{TM}}(u) = \frac{n_2^2}{n_1^2}\tan\left(u - m\,\frac{\pi}{2}\right),$$

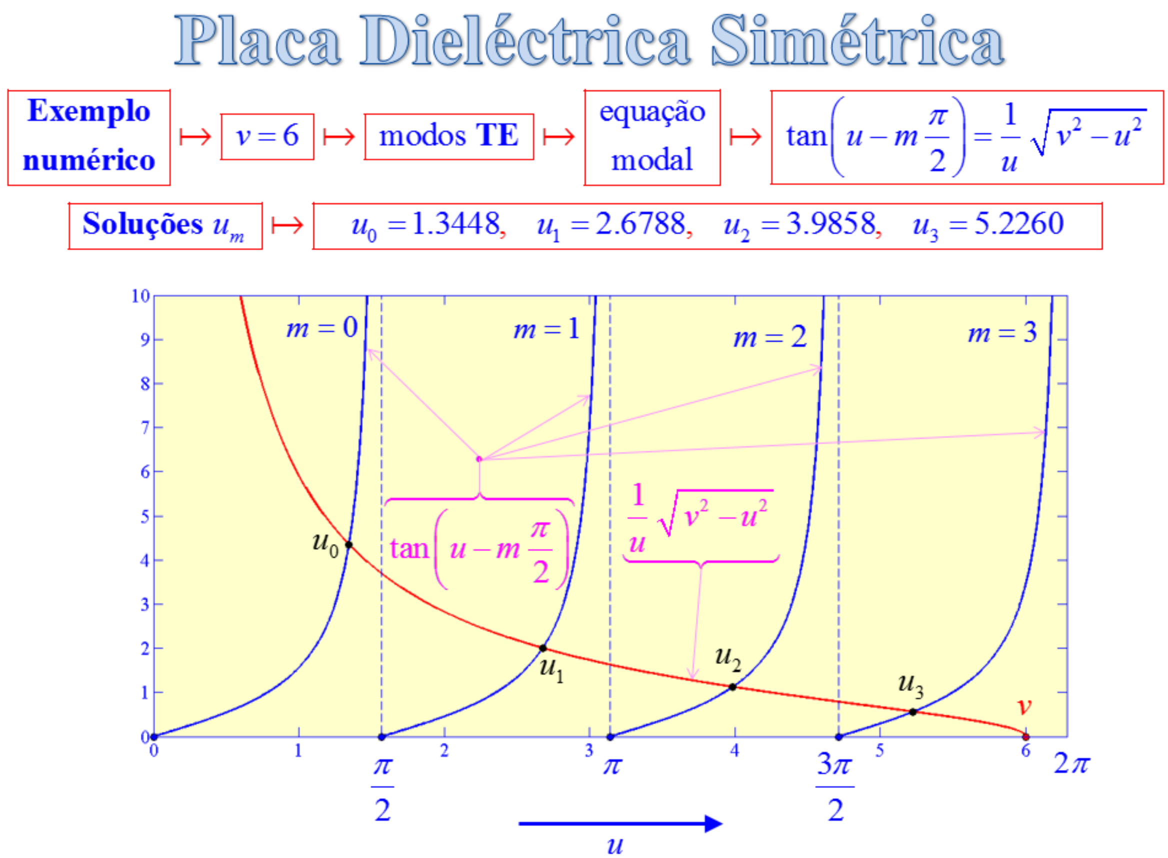
para os diferentes valores inteiros (pares e ímpares) de m; (ii) a curva que representa o lado direito,

$$g_v(u) = \frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2} \,,$$

para um determinado valor da frequência normalizada v da placa dieléctrica. Então, a solução u corresponde a ter-se (com $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{cases} \text{Modos TE}_m & \mapsto \quad f_m^{\mathbf{TE}}(u) = g_v(u), \\ \text{Modos TM}_m & \mapsto \quad f_m^{\mathbf{TM}}(u) = g_v(u). \end{cases}$$

Na figura anexa, que a seguir se apresenta, ilustra-se um caso concreto desta resolução gráfica. Neste exemplo consideram-se os modos TE_m com $m = 0, 1, 2, 3$ para uma frequência normalizada $v = 6$.



Do ponto de vista estritamente numérico a representação gráfica permite ajudar a localizar a solução pretendida. Por exemplo: o modo TE_0 tem uma solução u_0 no intervalo

$$0 < u_0 < \frac{\pi}{2}.$$

A corresponde equação modal é

$$\begin{cases} w = u \tan(u) \\ u^2 + w^2 = v^2 \end{cases} \mapsto \quad u^2 + u^2 \tan^2(u) = v^2 \quad \mapsto \quad u^2 \cos^2(u) + u^2 \sin^2(u) = v^2 \cos^2(u)$$

$$\therefore \quad u^2 = v^2 \cos^2(u) \quad \mapsto \quad \boxed{\Phi_v(u) = u^2 - v^2 \cos^2(u) = 0}\,.$$

Trata-se, portanto, de encontrar a solução u_0 que satisfaz $\Phi_v(u) = 0$ quando $v = 6$. A seguinte instrução MATLAB permite encontrar a solução:

```
u_0 = fzero ( 'x^2-6^2*cos(x)^2', 1).
```

Neste caso deu-se uma aproximação inicial: $u_0 \approx 1$. O resultado obtido é: $u_0 = 1.3448$. Note-se a necessidade de utilizar a variável x em vez da variável u. Uma solução alternativa consiste em fornecer o intervalo de pesquisa da raiz. Por exemplo:

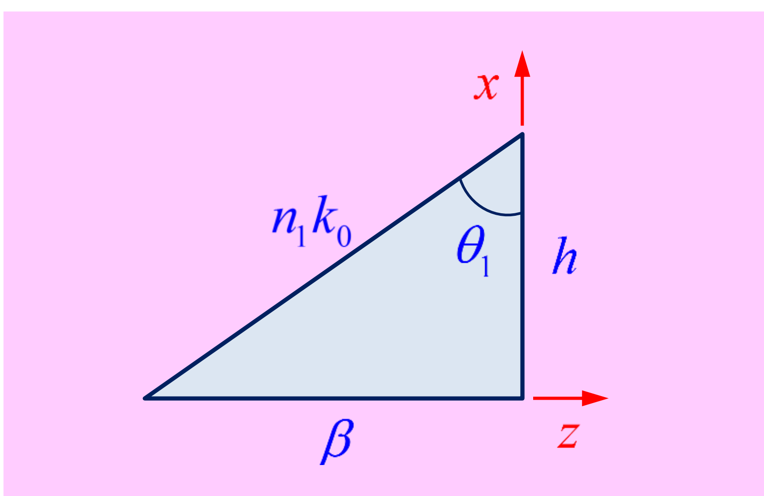
```
u_0 = fzero ( 'x^2-6^2*cos(x)^2', [0.5 1.5] ).
```

Naturalmente que o resultado é o mesmo.

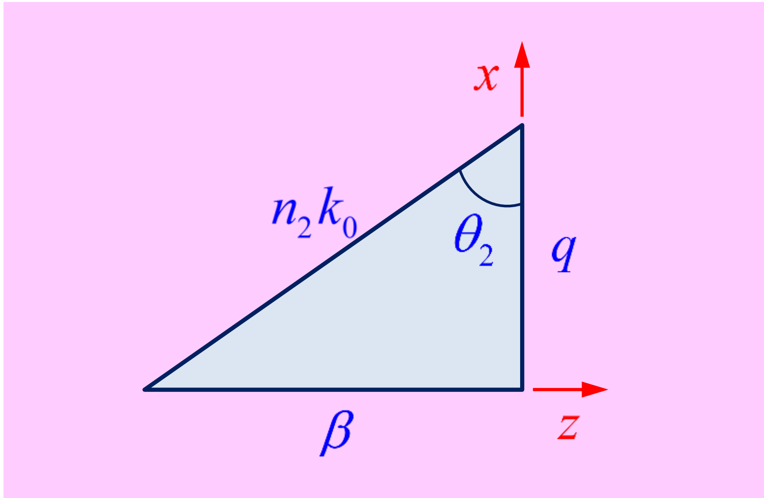
Como se disse atrás, a propagação guiada de ondas electromagnéticas superficiais numa placa dieléctrica simétrica deve-se à reflexão interna total nas duas interfaces entre o núcleo (i.e., o meio 1, no interior da placa) e a bainha (i.e., o meio 2, no exterior da placa). Num meio ilimitado com um índice de refracção n_1 a constante de propagação é $k = n_1 k_0$. Logo, a constante de propagação (transversal) segundo x será $h = k \cos(\theta_1) = n_1 k_0 \cos(\theta_1)$ e a constante de propagação (longitudinal) segundo z será $\beta = k \sin(\theta_1) = n_1 k_0 \sin(\theta_1)$, tendo-se

$$h^2 + \beta^2 = (n_1 k_0)^2$$

tal como se indica na figura seguinte (núcleo).



No meio 2 (a bainha) passa-se algo de semelhante.



Note-se algo de importante: de acordo com a lei de Snell (e, portanto, com as condições fronteira) a constante de propagação longitudinal β é a mesma nas duas últimas figuras (i.e., no núcleo e na bainha). Neste caso, porém, é $q = n_2 k_0 \cos(\theta_2)$ e $\beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2)$. Logo

$$q^2 + \beta^2 = (n_2 k_0)^2 .$$

Para que haja uma onda superficial, deverá ter-se $q = i\,\alpha$, com $\alpha > 0$. Isso só é possível fazendo

$$\boxed{\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\,\xi \in \mathbb{C}}$$

com $\xi > 0$. Com efeito, só nestas condições é que

$$\left|\begin{aligned} q &= n_2 k_0 \cos(\theta_2) \\ &= n_2 k_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\,\xi\right) \\ &= n_2 k_0 \sin(i\,\xi) \\ &= i\left[n_2 k_0 \sinh(\xi)\right] = i\,\alpha \end{aligned}\right. \quad \mapsto \quad \boxed{q^2 = -\alpha^2} \quad \mapsto \quad \boxed{\alpha = n_2 k_0 \sinh(\xi)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\beta^2 - \alpha^2 = (n_2 k_0)^2} .$$

No corte $\xi = 0$ e, quando $v \to \infty$, $\beta \to n_1 k_0$ pelo que, consequentemente,

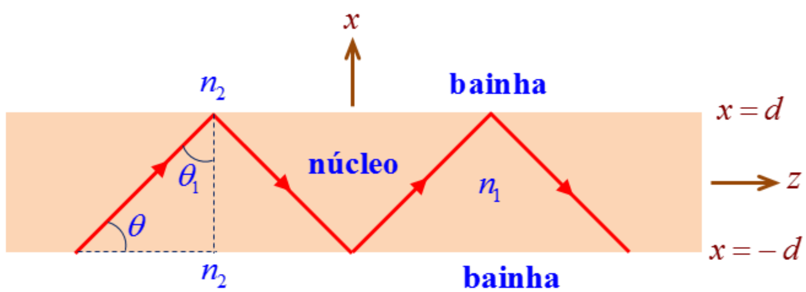
$$\alpha \to k_0 \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad \mapsto \quad \sinh(\xi) \to \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_2} .$$

De facto, tem-se

$$\sin(x)=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \quad \mapsto \quad \sin(iy)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}-e^{y}\right)=i\,\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right)=i\sinh(y)\,.$$

É claro que a existência de um ângulo $\theta_2 \in \mathbb{C}$ parece uma hipótese absurda. Mas, na realidade, isto é uma consequência de se ter imposto uma interpretação em termos de raios (óptica geométrica) a uma realidade que é essencialmente ondulatória (óptica ondulatória). O aparecimento de um ângulo complexo é, pois, a consequência de ser ter levado a um extremo uma interpretação (geométrica) para

Placa Dieléctrica Simétrica



$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2}-\theta_1 \\ \bar{\theta}_c = \dfrac{\pi}{2}-\theta_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = n_1 k_0 \cos(\theta_1) = n_1 k_0 \sin(\theta) \\ \beta = n_1 k_0 \sin(\theta_1) = n_1 k_0 \cos(\theta) \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} q = n_2 k_0 \cos(\theta_2) \\ \beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\text{reflexão interna total}} \mapsto \boxed{\theta_2 = \frac{\pi}{2} - i\,\xi} \Rightarrow \begin{cases} q = n_2 k_0 \cos(\theta_2) = n_2 k_0 \sin(i\,\xi) = i\,n_2 k_0 \sinh(\xi) = i\,\alpha \\ \beta = n_2 k_0 \sin(\theta_2) = n_2 k_0 \cos(i\,\xi) = n_2 k_0 \cosh(\xi) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boxed{h^2+\beta^2 = n_1^2 k_0^2} \quad \& \quad \boxed{\alpha = n_2 k_0 \sinh(\xi)} \quad \& \quad \boxed{\beta^2-\alpha^2 = n_2^2 k_0^2}$$

fora do seu âmbito natural de aplicação. Na figura seguinte apresenta-se esta interpretação geométrica, em termos de raios, da propagação guiada na placa dieléctrica simétrica.

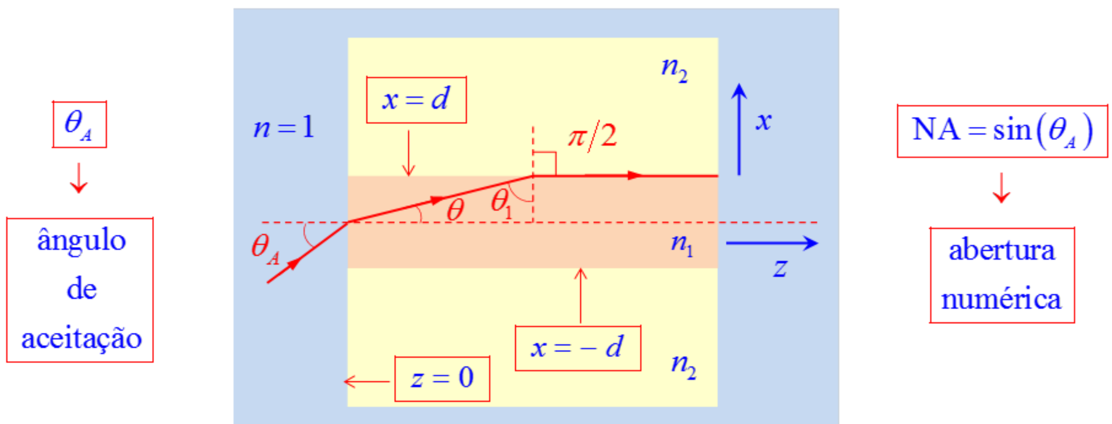
O corte de um dado modo superficial corresponde, portanto, ao início da reflexão interna total, i.e., quando $\theta_2 = \pi/2$ e $\xi = 0$. Ou seja: o corte acontece para

$$\alpha = 0 \quad \mapsto \quad \boxed{w=0}\,.$$

Neste caso é $\beta = n_2 k_0$ (donde $\bar{n} = n_2$ e $b = 0$). À medida que a frequência normalizada v aumenta, o campo electromagnético começa a concentrar-se dentro do núcleo, aumentando o valor positivo da constante de atenuação transversal α. A aplicação da lei de Snell permite, também, calcular o máximo ângulo de aceitação da radiação incidente na placa (supondo que esta tem uma interface lateral em $z=0$ e é, portanto, semi-ilimitada ao longo da direcção longitudinal de propagação). É o que se apresenta na figura seguinte.

Placa Dieléctrica Simétrica

A propagação de **ondas superficiais** na **placa dieléctrica** deve-se à existência de **reflexão interna total** nas interfaces núcleo-bainha.



$$\boxed{n_1>n_2} \;\Rightarrow\; \boxed{n_1\sin(\theta_1)}=n_2\sin(\theta_2)=n_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{n_2} \;\Rightarrow\; \cos(\theta_1)=\sqrt{1-\frac{n_2^2}{n_1^2}}$$

$$\therefore\; \boxed{\mathrm{NA}=\sin(\theta_A)}=n_1\sin(\theta)=n_1\cos(\theta_1)=\boxed{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}$$

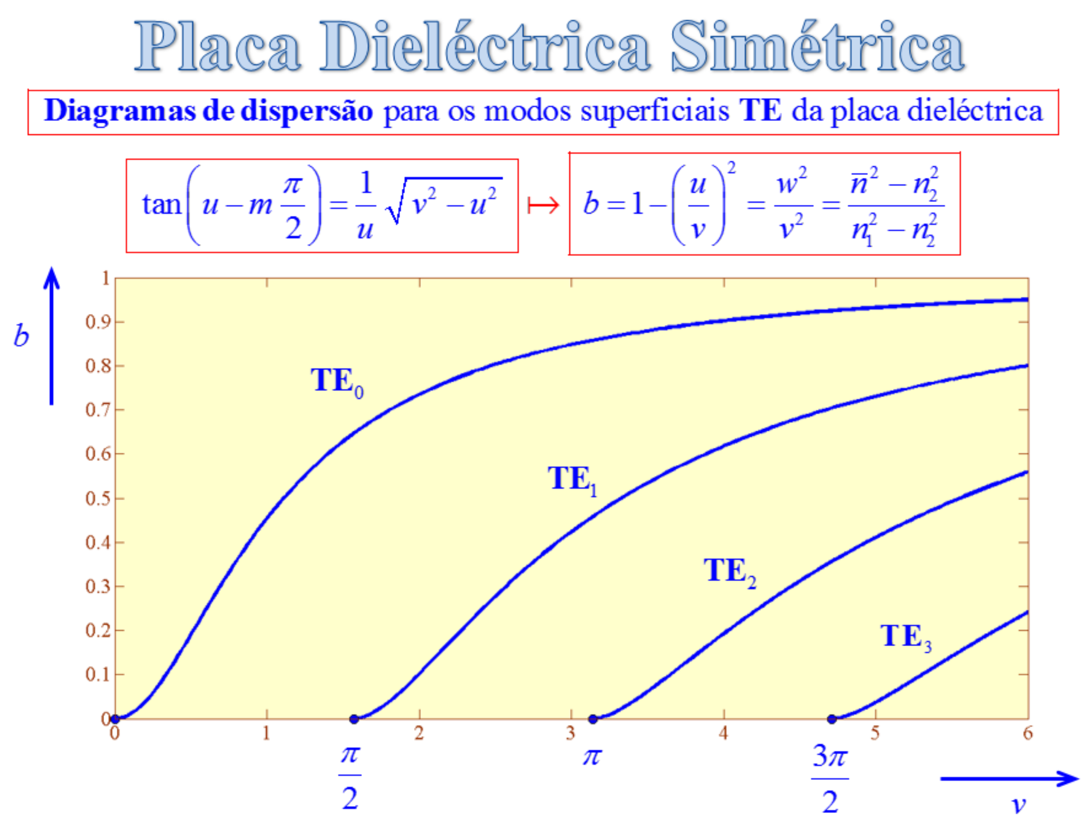
A abertura numérica, $\mathrm{NA}=\sin(\theta_A)=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=n_1\sqrt{2\Delta}$, aumenta com a raiz quadrada do contraste dieléctrico Δ. Numa placa dieléctrica com pequeno contraste, em que $\Delta\ll 1$, os modos superficiais são fracamente guiados pois

$$v=(k_0 d)\,n_1\sqrt{2\Delta}=(k_0 d)(\mathrm{NA})\ll 1,$$

o que significa que b está próximo de zero.

Na figura seguinte mostra-se um *diagrama de dispersão*i.e,. uma figura em que se mostra, de forma sistemática, as soluções das equações modais numa dada gama de variação da frequência normalizada. No caso em análise, trata-se de um gráfico de b em função de v para os modos TE no intervalo $0 \le v \le 6$. Isto significa que cada ponto destas curvas corresponde a uma solução da equação modal

$$\tan\left(u - m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2} \quad .$$

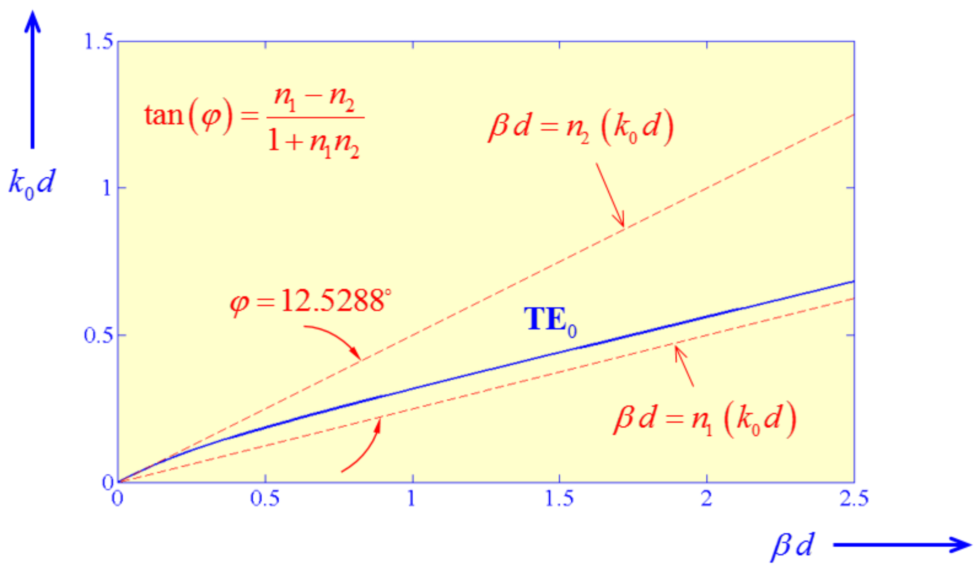


Uma forma alternativa de apresentar as soluções das equações modais consiste numa nova forma de diagrama de dispersão – o chamado *diagrama de Brillouin* (figura seguinte). Este diagrama de dispersão evidencia a influência do contraste dieléctrico Δ na dispersão estrutural do guia aberto. Com efeito, à medida que o contraste dieléctrico diminui $(\Delta \to 0)$, a curva de dispersão estrutural do guia (i.e., a dispersão no caso em que se despreza a componente de dispersão material) tende para uma recta – a linha recta correspondente a $\beta d = n_1(k_0 d) = n_2(k_0 d)$ pois o ângulo φ (ver figura) tende para zero. Isto significa que o modo TE (ou TM) tende para um modo puramente TEM sem componentes longitudinais, i.e., com $E_z = H_z = 0$. Note-se que um modo TEM só existe em meios dieléctricos homogéneos – como seria o caso limite de uma placa dieléctrica sem contraste dieléctrico.

Placa Dieléctrica Simétrica

Diagrama de Brillouin para o primeiro modo **TE** $(m=0)$ da placa dieléctrica

$$\begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \boxed{\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2} = 0.375} \qquad \boxed{k_0 d = \frac{v}{n_1 \sqrt{2\Delta}}} \qquad \boxed{\beta d = \sqrt{\frac{v^2}{2\Delta} - u^2}}$$



Note-se que, em relação à figura anterior, se tem

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)}{1 + \tan(\varphi_2)\tan(\varphi_1)} .$$

Logo, como $\tan(\varphi_2) = 1/n_2$ e $\tan(\varphi_1) = 1/n_1$,

vem, efectivamente,

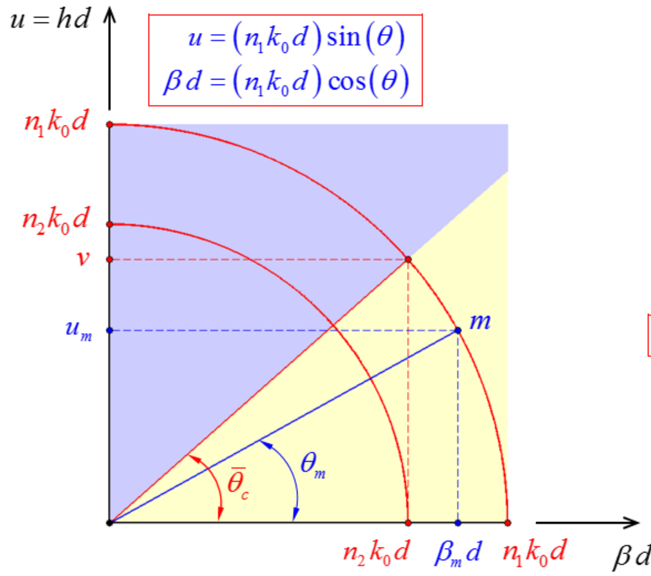
$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{n_1 - n_2}{1 + n_1 n_2}} .$$

Portanto: $\Delta \to 0$ implica $\varphi \to 0$, tal como se tinha comentado anteriormente. As duas figuras seguintes ajudam a visualizar a gama de variação de u e w em termos de βd .

Placa Dieléctrica Simétrica

$$u = (n_1 k_0 d)\sin(\theta)$$
$$\beta d = (n_1 k_0 d)\cos(\theta)$$

$$\beta_m = \bar{n}\, k_0$$



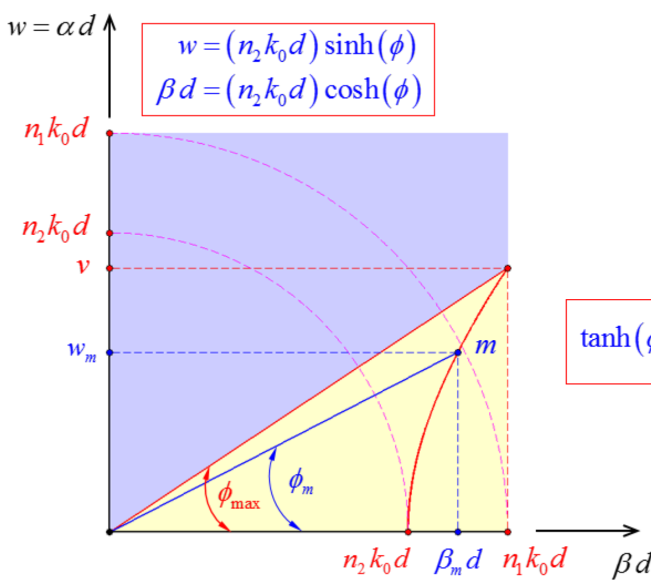
$$n_2 \le \bar{n} < n_1$$

$$(\beta_m d)^2 + u_m^2 = (n_2 k_0 d)^2 + v^2 = (n_1 k_0 d)^2$$

Placa Dieléctrica Simétrica

$$w = (n_2 k_0 d)\sinh(\phi)$$
$$\beta d = (n_2 k_0 d)\cosh(\phi)$$

$$\tanh(\phi_m) = \frac{w_m}{\beta_m d}$$



$$\tanh(\phi_{\max}) = \frac{v}{n_1 k_0 d}$$

$$(\beta_m d)^2 - w_m^2 = (n_1 k_0 d)^2 - v^2 = (n_2 k_0 d)^2$$

A *velocidade de grupo* v_g de um dado modo superficial é, por definição,

$$v_g = \frac{1}{\dfrac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{1}{\dfrac{\partial \beta}{\partial k_0}\dfrac{\partial k_0}{\partial \omega}} \,.$$

Logo, como

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad \mapsto \quad \frac{\partial k_0}{\partial \omega} = \frac{1}{c} \quad \mapsto \quad v_g = \frac{c}{\dfrac{\partial \beta}{\partial k_0}} \,,$$

tem-se, em geral,

$$\boxed{v_g = \frac{c}{n_g}}$$

onde se introduziu o chamado *índice de grupo* n_g tal que

$$\boxed{n_g = \frac{\partial \beta}{\partial k_0}} \,.$$

Sendo $\beta = \bar{n}\, k_0$, em que (como se viu) $\bar{n}$ representa o índice de refracção modal, vem então

$$n_g = \frac{\partial}{\partial k_0}\left(\bar{n}\, k_0\right) = \bar{n} + k_0 \frac{\partial \bar{n}}{\partial k_0} \,.$$

Note-se, porém, que – no caso particular de se desprezar a dispersão material – então ainda se tem

$$v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta} \quad \mapsto \quad \frac{\partial v}{\partial k_0} = n_1 d \sqrt{2\Delta} = \frac{v}{k_0} \quad \mapsto \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial k_0} = \frac{\partial \bar{n}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial k_0} = \frac{v}{k_0}\frac{\partial \bar{n}}{\partial v} \,,$$

donde se infere que

$$\boxed{n_g = \bar{n} + v \frac{\partial \bar{n}}{\partial v}} \,.$$

Mas, por outro lado, é

$$b = \frac{\bar{n}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad \mapsto \quad \bar{n}^2 = n_2^2 + b\left(n_1^2 - n_2^2\right) \quad \mapsto \quad \boxed{\bar{n}^2 = n_2^2 + 2 n_1^2 b \Delta} \,.$$

Logo, quando se despreza a dispersão material, obtém-se

$$2\,\bar{n}\,\frac{\partial \bar{n}}{\partial v}=2n_1^2\Delta\,\frac{d\,b}{d\,v}\quad\mapsto\quad\boxed{\frac{\partial \bar{n}}{\partial v}=\frac{n_1^2\Delta}{\bar{n}}\frac{d\,b}{d\,v}}\,.$$

Conclui-se, portanto, que – *caso se despreze a dispersão material* – então

$$n_g=\bar{n}+v\,\frac{\partial \bar{n}}{\partial v}\quad\mapsto\quad\boxed{n_g=\bar{n}+\frac{n_1^2\Delta}{\bar{n}}\left(v\,\frac{d\,b}{d\,v}\right)}\,.$$

Assim, podemos escrever que a velocidade de grupo pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$v_g=\frac{c}{n_g}=\frac{c}{\bar{n}+\dfrac{n_1^2\Delta}{\bar{n}}\left(v\,\dfrac{d\,b}{d\,v}\right)}=\frac{c/\bar{n}}{1+\Delta\left(\dfrac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\left(v\,\dfrac{d\,b}{d\,v}\right)}\quad\mapsto\quad v_g=\frac{v_p}{1+\Delta\left(\dfrac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\left(v\,\dfrac{d\,b}{d\,v}\right)}$$

$$\therefore\quad\boxed{\frac{v_p}{v_g}=1+\Delta\left(\frac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\left(v\,\frac{d\,b}{d\,v}\right)}\,.$$

Esta expressão mostra como, efectivamente, se tem $v_g\to v_p$ no limite em que $\Delta\to 0$.

Vejamos, agora, um primeiro exemplo de aplicação. Consideremos, para o efeito, o caso dos modos TE ímpares, em que

$$\begin{cases} w=-u\cot(u) \\ u^2+w^2=v^2\end{cases}\quad\mapsto\quad\boxed{u^2=v^2\sin^2(u)}\,.$$

Por um lado, infere-se daqui que

$$b=1-\left(\frac{u}{v}\right)^2=1-\sin^2(u)\quad\mapsto\quad\boxed{b=\cos^2(u)}\quad\mapsto\quad\frac{d\,b}{d\,u}=-2\sin(u)\cos(u)$$

$$\therefore\quad\boxed{\frac{d\,b}{d\,u}=-\sin(2u)}\,.$$

Por outro lado, vem

$$u^2=v^2\sin^2(u)\quad\mapsto\quad 2\,u\,\frac{d\,u}{d\,v}=2v\sin^2(u)+2v^2\sin(u)\cos(u)\frac{d\,u}{d\,v}=2v\sin^2(u)+v^2\sin(2u)\frac{d\,u}{d\,v}$$

$$\therefore\quad\left[2u-v^2\sin(2u)\right]\frac{d\,u}{d\,v}=2v\sin^2(u)=v\left[1-\cos(2u)\right]\quad\mapsto\quad\boxed{\frac{d\,u}{d\,v}=\frac{v\left[1-\cos(2u)\right]}{2u-v^2\sin(2u)}}\,.$$

Infere-se, deste modo, que

$$\frac{d\,b}{d\,v}=\frac{d\,b}{d\,u}\,\frac{d\,u}{d\,v}=-\sin(2u)\,\frac{v\left[1-\cos(2u)\right]}{2u-v^2\sin(2u)} \quad \mapsto \quad \boxed{v\,\frac{d\,b}{d\,v}=-\frac{v^2\sin(2u)\left[1-\cos(2u)\right]}{2u-v^2\sin(2u)}}\,.$$

Ou seja: tem-se, neste caso,

$$\frac{v_p}{v_g}=1+\Delta\left(\frac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\left(v\,\frac{d\,b}{d\,v}\right) \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{v_p}{v_g}=1-\Delta\left(\frac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\frac{v^2\sin(2u)\left[1-\cos(2u)\right]}{2u-v^2\sin(2u)}}\,.$$

Vejamos, de seguida, o caso dos modos TM pares, em que

$$\begin{cases} w=(1-2\Delta)\,u\,\tan(u) \\ u^2+w^2=v^2 \end{cases} \quad \mapsto \quad \boxed{u^2\left[\cos^2(u)+(1-2\Delta)^2\sin^2(u)\right]=v^2\cos^2(u)}\,.$$

Assim, vem

$$\boxed{b=\frac{(1-2\Delta)^2\sin^2(u)}{\cos^2(u)+(1-2\Delta)^2\sin^2(u)}} \quad \mapsto \quad \boxed{\frac{d\,b}{d\,u}=\frac{(1-2\Delta)^2\sin(2u)}{\left[\cos^2(u)+(1-2\Delta)^2\sin^2(u)\right]^2}}\,.$$

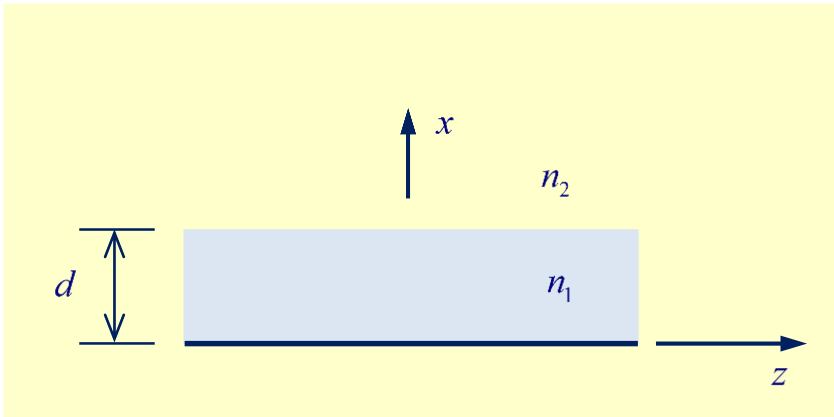
Além disso, tem-se

$$\boxed{\frac{d\,u}{d\,v}=\frac{v\left[1+\cos(2u)\right]}{2u\left[\cos^2(u)+(1-2\Delta)^2\sin^2(u)\right]+\sin(2u)\left\{v^2-\left[1-(1-2\Delta)^2\right]u^2\right\}}}\,.$$

Portanto, vem finalmente:

$$\boxed{\frac{v_p}{v_g}=1+\Delta\left(\frac{n_1}{\bar{n}}\right)^2\left[v\left(\frac{d\,b}{d\,u}\right)\left(\frac{d\,u}{d\,v}\right)\right]}\,.$$

Para terminar este breve estudo sobre a placa dieléctrica simétrica vai-se considerar, agora, uma nova estrutura: a placa dieléctrica assente sobre um plano condutor (eléctrico) perfeito ou PEC (*perfect electric conductor*) – tal como se representa na figura seguinte.



Este guia suporta modos superficiais – exactamente como a placa dieléctrica simétrica. Existe, porém, uma diferença fundamental: a existência de um PEC no plano $x = 0$. Consequentemente, a existência de um condutor perfeito neste plano, impõe as seguintes condições fronteira:

$$\boxed{x = 0} \quad \mapsto \quad \boxed{E_y = E_z = 0}.$$

Os modos TE pares, com $E_y \neq 0$ em $x = 0$, não verificam esta condição. Da mesma forma, os modos TM ímpares, com $E_z \neq 0$ em $x = 0$, também violam esta condição. Em conclusão: só os modos TE ímpares e os modos TM pares é que estão de acordo com esta condição suplementar e, portanto, podem propagar-se nesta estrutura; os modos TE pares e os modos TM ímpares, contudo, não se podem propagar neste novo guia aberto.

Vejamos, então, um exemplo concreto. Consideremos que $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ e $d = 6.5\ \text{mm}$. Para uma frequência $f = 12\ \text{GHz}$, obtém-se

$$\begin{cases} \lambda = c / f = 2.5\text{cm} \\ \Delta = 0.375 \end{cases} \quad \mapsto \quad v = n_1 k_0 d \sqrt{2\Delta} = 2\pi \frac{d}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta} = 2.8315.$$

Neste caso propagam-se os dois primeiros modos: o modo TM_0 e o modo TE_1. No caso do modo TM_0 a solução é $u_0 = 1.4261$. No caso do modo TE_1 a solução é $u_1 = 2.2330$. Nestas condições, obtêm-se os resultados que se apresentam a seguir.

$$\boxed{\text{TM}_0} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} \bar{n} = 1.7997 \\ \lambda_g = 13.8814\ \text{mm} \\ v_p = 1.6668 \times 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{TE}_1} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \bar{n} = 1.4609 \\ \lambda_g = 17.1011\ \mathrm{mm} \\ v_p = 2.0521\times 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \end{cases}$$

Calculemos, ainda, a velocidade de grupo do modo TE_1. Utilizando, então, a expressão

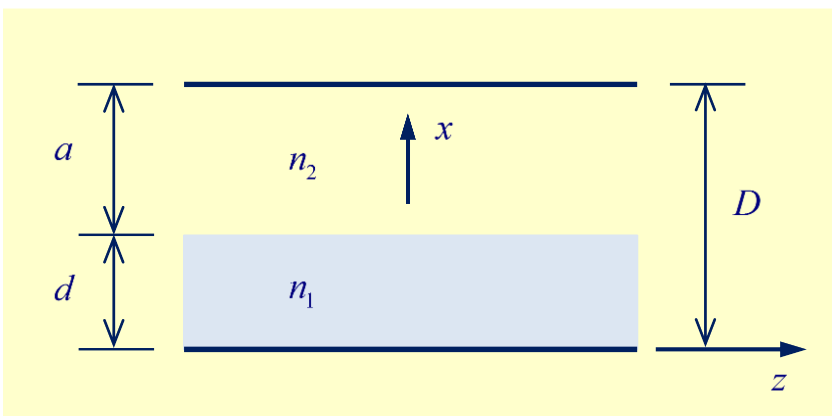
$$\boxed{n_g = \bar{n}\left[1-\Delta\,\frac{n_1^2}{\bar{n}^2}\,\frac{2v^2\sin(2u)\sin^2(u)}{2u - v^2\sin(2u)}\right]},$$

obtém-se

$$\boxed{\mathrm{TE}_1} \quad \mapsto \quad n_g = \quad \mapsto \quad v_g = \ .$$

Placa Dieléctrica Blindada

A geometria do guia fechado, sob consideração, encontra-se na figura anexa.



A estrutura encontra-se blindada por dois planos PEC (*perfect electric conductor*) colocados em $x=0$ e em $x=D=d+a$. Trata-se, ainda, de uma estrutura estratificada planar, preenchida por dois dieléctricos diferentes: (i) um dieléctrico, para $0<x\leq d$, com um índice de refracção n_1; (ii) um dieléctrico, para $d<x<D$, com um índice de refracção n_2. Assim, as relações constitutivas escrevem-se

$$\begin{cases} \mathbf{D}=\varepsilon_0\,\varepsilon(x)\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B}=\mu_0\,\mathbf{H} \end{cases}$$

tendo-se, portanto,

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} n_1^2, & 0 < x \le d \\ n_2^2, & d < x < D \end{cases}$$

em que se admite que $n_1 > n_2$.

Neste guia o campo electromagnético está confinado ao interior da estrutura: $0 < x < D$. Existem duas classes de modos guiados: (i) modos TE, com $E_z = 0$; (ii) modos TM, com $H_z = 0$. A direcção (longitudinal) de propagação é o sentido positivo do eixo z. Isto significa que todas as componentes do campo electromagnético têm uma variação da forma

$$\exp\left[i\left(\beta z - \omega t\right)\right] = \exp\left(i\beta z\right)\exp\left(-i\omega t\right).$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{cases} E_x(x,y,z,t) = \Re\left\{ E_x(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \\ E_y(x,y,z,t) = \Re\left\{ E_y(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \\ E_z(x,y,z,t) = \Re\left\{ E_z(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \\ H_x(x,y,z,t) = \Re\left\{ H_x(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \\ H_y(x,y,z,t) = \Re\left\{ H_y(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \\ H_z(x,y,z,t) = \Re\left\{ H_z(x,y,z)\exp(-i\omega t)\right\} \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} E_x(x,y,z) = E_x(x,y)\exp(i\beta z) \\ E_y(x,y,z) = E_y(x,y)\exp(i\beta z) \\ E_z(x,y,z) = E_z(x,y)\exp(i\beta z) \\ H_x(x,y,z) = H_x(x,y)\exp(i\beta z) \\ H_y(x,y,z) = H_y(x,y)\exp(i\beta z) \\ H_z(x,y,z) = H_z(x,y)\exp(i\beta z) \end{cases}$$

Como a estrutura é uniforme e ilimitada ao longo de y, não deverá existir qualquer variação com esta variável espacial, i.e.,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0}\,.$$

Mas então, ainda se pode escrever

$$\begin{cases} E_x(x,y,z) = E_x(x)\exp(i\beta z) \\ E_y(x,y,z) = E_y(x)\exp(i\beta z) \\ E_z(x,y,z) = E_z(x)\exp(i\beta z) \\ H_x(x,y,z) = H_x(x)\exp(i\beta z) \\ H_y(x,y,z) = H_y(x)\exp(i\beta z) \\ H_z(x,y,z) = H_z(x)\exp(i\beta z) \end{cases}$$

pelo que

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial}{\partial t} & \mapsto & -i\omega \\ \nabla & \mapsto & \mathbf{e}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + i\beta\,\mathbf{e}_3 \end{array}}\,.$$

Designa-se por β a constante de propagação longitudinal dentro do guia. Como é habitual, k_0 representa – por sua vez – a constante de propagação no vácuo. Tem-se

$$\boxed{k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}}$$

em que λ é o comprimento de onda medido no ar (ou no vácuo) e λ_g o comprimento de onda dentro do guia. Sendo v_p a velocidade de fase de um dado modo guiado pelo guia, tem-se

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k_0} = \lambda f, \qquad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda_g f}$$

pelo que

$$\boxed{v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda}c}\,.$$

Os modos TE têm, apenas, três componentes do campo electromagnético que não são identicamente nulas: (E_y, H_x, H_z). Por sua vez, os modos TM têm, apenas, três componentes do campo electromagnético que não são identicamente nulas: (H_y, E_x, E_z).

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \rightarrow \begin{cases} H_x = -\dfrac{\beta}{\omega\,\mu_0}\,E_y \\[2ex] H_z = -i\,\dfrac{\beta}{\omega\,\mu_0}\,\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \rightarrow \begin{cases} E_x = \dfrac{\beta}{\omega\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,H_y \\[2ex] E_z = i\,\dfrac{\beta}{\omega\varepsilon_0\,\varepsilon(x)}\,\dfrac{\partial H_y}{\partial x} \end{cases}$$

As componentes de suporte (i.e., aqueles componentes a partir das quais se determinam as duas outras componentes em cada classe de modos) são, consequentemente, as componentes segundo y: (i) a componente E_y, nos modos TE; (ii) a componente H_y, nos modos TM. Estas componentes de suporte são determinadas pelas equações diferenciais:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\varepsilon(x)\,k_0^2 - \beta^2\right] \right\} \left\{ \begin{matrix} E_y \\ H_y \end{matrix} \right\} = 0\,.$$

Existem dois tipos de condições fronteira que é necessário ter em consideração: 1) a existência de um PEC quer em $x=0$ quer em $x=D$; 2) a interface em $x=d$ que separa dois dieléctricos com diferentes índices de refracção. Assim, temos de considerar que:

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1) & \mapsto \quad E_y(x=0) = E_y(x=D) = 0 \\ 2) & \mapsto \quad \left[\begin{array}{l} E_y(x=d^-) = E_y(x=d^+) \\ H_z(x=d^-) = H_z(x=d^+) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \rightarrow \left[\begin{array}{ll} 1) & \mapsto \quad E_z(x=0) = E_z(x=D) = 0 \\ 2) & \mapsto \quad \left[\begin{array}{l} H_y(x=d^-) = H_y(x=d^+) \\ E_z(x=d^-) = E_z(x=d^+) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Logo, introduzindo as constantes de propagação segundo x, a saber:

$$\begin{cases} h^2 = n_1^2\,k_0^2 - \beta^2 \\ q^2 = n_2^2\,k_0^2 - \beta^2 \end{cases}$$

vem

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \to E_y(x) = \begin{cases} A\sin(hx), & 0<x<d \\ B\sin\left[q(D-x)\right], & d<x<D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \to H_z(x) = -i\,\frac{\beta}{\omega\mu_0} \begin{cases} hA\cos(hx), & 0<x<d \\ -qB\cos\left[q(D-x)\right], & d<x<D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \to H_y(x) = \begin{cases} A\cos(hx), & 0<x<d \\ B\cos\left[q(D-x)\right], & d<x<D \end{cases}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \to E_z(x) = i\,\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} \begin{cases} -\dfrac{h}{n_1^2}A\sin(hx), & 0<x<d \\ \dfrac{q}{n_2^2}B\sin\left[q(D-x)\right], & d<x<D \end{cases}$$

Consequentemente, obtém-se

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \to \begin{pmatrix} \sin(hd) & -\sin(qa) \\ h\cos(hd) & q\cos(qa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \to \begin{pmatrix} \cos(hd) & -\cos(qa) \\ -\dfrac{h}{n_1^2}\sin(hd) & -\dfrac{q}{n_2^2}\sin(qa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

As equações modais resultam de considerar soluções não triviais, i.e., com $A \neq 0$ e $B \neq 0$, assim impondo o anulamento do determinante nas anteriores equações matriciais.

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \to \boxed{\text{Equação Modal}} \to \boxed{q\sin(hd)\cos(qa) + h\cos(hd)\sin(qa) = 0}$$

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \to \boxed{\text{Equação Modal}} \to \boxed{\frac{q}{n_2^2}\cos(hd)\sin(qa) + \frac{h}{n_1^2}\sin(hd)\cos(qa) = 0}$$

Introduzamos, então, as seguintes variáveis normalizadas (adimensionais):

$$\left| \begin{array}{l} u = hd \\ s = qd \end{array} \right. \quad \mapsto \quad \left| \begin{array}{l} u^2 = n_1^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \\ s^2 = n_2^2 k_0^2 d^2 - \beta^2 d^2 \end{array} \right.$$

Logo, sendo v a *frequência normalizada*, tal que

$$\boxed{v = k_0\, d\, \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}\,,$$

obtém-se a seguinte relação

$$\boxed{u^2 - s^2 = v^2} \quad \mapsto \quad \boxed{s = \sqrt{u^2 - v^2}}\,.$$

Então, introduzindo o coeficiente de preenchimento dieléctrico

$$\boxed{\xi = \frac{a}{d}}$$

ainda se tem

$$q\,a = (q\,d)\left(\frac{a}{d}\right) = \xi\, s\,.$$

Logo, em termos das variáveis adimensionais, infere-se que:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{MODOS}\\ \textbf{TE}\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{s \cot(\xi\, s) = -\sqrt{s^2 + v^2}\, \cot\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)}\,,$$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{MODOS}\\ \textbf{TM}\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal}} \rightarrow \boxed{s \tan(\xi\, s) = -\frac{n_2^2}{n_1^2}\sqrt{s^2 + v^2}\, \tan\left(\sqrt{s^2 + v^2}\right)}\,.$$

Os diagramas de dispersão do guia podem ser representados em termos do chamado índice de refracção modal (ou efectivo) $\bar{n}$, tal que

$$\boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0}}\,.$$

Então, vem

$$\left|\begin{array}{l} u^2 = (k_0\, d)^2 \left(n_1^2 - \bar{n}^2\right) \\ s^2 = (k_0\, d)^2 \left(n_2^2 - \bar{n}^2\right) \end{array}\right.$$

Introduzindo o contraste dieléctrico Δ tal que

$$\boxed{\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2\,n_1^2}} \mapsto \boxed{n_2 = n_1\,\sqrt{1-2\Delta}}$$

é possível reescrever a frequência normalizada v como segue

$$\boxed{v = n_1\,k_0\,d\,\sqrt{2\Delta}} \rightarrow \boxed{k_0\,d = \frac{v}{n_1\,\sqrt{2\Delta}}}$$

$$\therefore \quad \left| \begin{aligned} u^2 &= \left(\frac{v}{n_1\,\sqrt{2\Delta}}\right)^2 \left(n_1^2 - \bar{n}^2\right) \\ s^2 &= \left(\frac{v}{n_1\,\sqrt{2\Delta}}\right)^2 \left(n_2^2 - \bar{n}^2\right) \end{aligned} \right. \mapsto \boxed{\begin{aligned} u &= \left(\frac{v}{\sqrt{2\Delta}}\right) \frac{\sqrt{n_1^2 - \bar{n}^2}}{n_1} \\ s &= \left(\frac{v}{\sqrt{2\Delta}}\right) \frac{\sqrt{n_2^2 - \bar{n}^2}}{n_1} \end{aligned}}\,.$$

Note-se que, uma vez conhecido o valor de u para uma certa frequência normalizada v, vem

$$\boxed{\bar{n} = n_1\,\sqrt{1 - 2\Delta\left(\frac{u}{v}\right)^2}}\,.$$

O corte de um dado modo guiado é – em regra – dado por $\beta = 0$ a que corresponde $\bar{n} = 0$. Existe uma única excepção: o modo fundamental – o modo TM_0 – não tem corte. Assim, à excepção do modo fundamental, o corte corresponde a uma frequência normalizada v_c para a qual se tem

$$\boxed{k_c\,d = 2\pi\left(\frac{d}{\lambda_c}\right) = \left(\frac{2\pi\,d}{c}\right) f_c = \frac{v_c}{n_1\,\sqrt{2\Delta}}} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} u_c &= n_1\left(k_c\,d\right) = \frac{v_c}{\sqrt{2\Delta}} \\ s_c &= n_2\left(k_c\,d\right) = \sqrt{\frac{1-2\Delta}{2\Delta}}\;v_c \end{aligned}}\,.$$

Enquanto f_c representa a frequência de corte, λ_c representa o comprimento de onda de corte. Um dado modo, para o qual de tenha $\lambda_c\,f_c = c$, só se propaga para $f > f_c$, i.e., para $\lambda < \lambda_c$.

Em conformidade, obtém-se – tanto para os modos TE como para os modos TM – a mesma equação para o corte (note-se que $n_2 / n_1 = \sqrt{1-2\Delta}$):

$$\boxed{\text{Corte}} \rightarrow \boxed{v_c = u_c\,\sqrt{2\Delta}} \rightarrow \boxed{\sqrt{1-2\Delta}\,\tan\left(u_c\right) + \tan\left(\xi\,u_c\,\sqrt{1-2\Delta}\right) = 0}\,.$$

Isto tem um significado especial: a existência de **bifurcação modal**. Desta forma, os modos de propagação TE_{2m-1} e TM_{2m}, com $m = 1, 2, 3, \ldots$, têm a mesma frequência normalizada de corte – embora correspondam, depois, a diferentes curvas em termos de diagrama de dispersão.

Para $\bar{n} = n_2$ é $s = 0$ e dá-se uma transição: (i) para $\bar{n} < n_2$, $s > 0$; (ii) para $\bar{n} > n_2$, $s = i\,w$. Esta transição observa-se para $v = u = v_t$ tal que:

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{\tan(\xi\, s)}\right] = -\,v_t \cot(v_t)}$$

Logo, como

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{\tan(\xi\, s)}\right] = \frac{1}{\xi},$$

resulta que

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TE}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\tan(v_t) = -\,\xi\, v_t}.$$

Analogamente, vem (com $\ell = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\boxed{\text{MODOS } \textbf{TM}} \rightarrow \boxed{\text{Frequência normalizada de transição}} \rightarrow \boxed{\tan(v_t) = 0} \rightarrow \boxed{v_t = \ell\,\pi}.$$

Ou seja, à excepção do modo fundamental TM_0, todos os modos têm simultaneamente uma zona rápida e uma zona lenta. A saber:

$$\left|\begin{array}{llll} v < v_t & \mapsto & \text{zona rápida} & \mapsto \quad 0 < \bar{n} < n_2 \\ v > v_t & \mapsto & \text{zona lenta} & \mapsto \quad n_2 < \bar{n} < n_1 \end{array}\right.$$

A explicação para esta nomenclatura é a seguinte: a velocidade de fase de um dado modo é sempre dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\bar{n}\, k_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda}\, c = \frac{c}{\bar{n}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{n} = \frac{c}{v_p} = \frac{\lambda}{\lambda_g}}.$$

Acontece que, para $v = v_t$ é $\bar{n} = n_2$ e, portanto, vem

$$\boxed{v = v_t} \quad \mapsto \quad \boxed{v_p = \frac{c}{n_2}}\,.$$

Logo, na zona rápida tem-se

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{zona}\\ \text{rápida}\end{array}} \rightarrow \boxed{v_p > \frac{c}{n_2}}\,.$$

Na zona lenta, porém, tem-se

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{zona}\\ \text{lenta}\end{array}} \rightarrow \boxed{\frac{c}{n_1} < v_p < \frac{c}{n_2}}\,.$$

Na zona lenta de cada modo a equação modal é mais facilmente escrita em termos da variável

$$\boxed{w = \alpha\, d = k_0\, d\,\sqrt{\bar{n}^2 - n_2^2}} \rightarrow \boxed{w^2 = -\,s^2} \rightarrow \boxed{u^2 + w^2 = v^2} \rightarrow \boxed{w = \sqrt{v^2 - u^2}}\,.$$

Assim, para a zona lenta, é preferível reescrever as equações modais como segue:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{MODOS}\\ \textbf{TE}\end{array}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2}\,\coth\left(\xi\,\sqrt{v^2 - u^2}\right) = -\cot(u)}\,,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{MODOS}\\ \textbf{TM}\end{array}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{u}\sqrt{v^2 - u^2}\,\tanh\left(\xi\,\sqrt{v^2 - u^2}\right) = \frac{n_2^2}{n_1^2}\tan(u)}\,.$$

Na escrita destas equações teve-se em consideração que

$$\tan(i\,x) = i\,\tanh(x), \quad \cot(i\,x) = -\,i\,\coth(x)\,.$$

Note-se, ainda, que – ao fazer $a \rightarrow \infty$ (e, consequentemente, $\xi \rightarrow \infty$) – se obtém

$$\lim_{\xi\rightarrow\infty}\left[\tanh(\xi\,w)\right] = 1, \quad \lim_{\xi\rightarrow\infty}\left[\coth(\xi\,w)\right] = 1\,.$$

Assim, infere-se o seguinte: os modos lentos (TE e TM) da placa dieléctrica blindada tendem para os modos superficiais da placa aberta quando se faz $a \rightarrow \infty$. Mais precisamente

$$\boxed{\text{MODOS }\ \textbf{TE}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{a \rightarrow \infty} \rightarrow \boxed{w = -\,u\,\cot(u)}$$

$$\boxed{\text{MODOS }\ \mathbf{TM}} \rightarrow \boxed{\text{Equação Modal (zona lenta)}} \rightarrow \boxed{a \to \infty} \rightarrow \boxed{w = \frac{n_2^2}{n_1^2}\, u \tan(u)}$$

O modo fundamental – o modo TM_0 – merece especial menção. Este modo tem um comportamento distinto de todos os outros modos. Com efeito, este modo fundamental é um modo sempre lento. Isto significa, em particular, que a equação modal

$$\boxed{\text{Modo Fundamental}} \rightarrow \boxed{\mathrm{TM}_0} \rightarrow \boxed{w \tanh(\xi\, w) = \frac{n_2^2}{n_1^2}\, u \tan(u)}$$

é aplicável a este modo independentemente da frequência de operação. Nomeadamente, à medida que a frequência tende para zero, é possível usar as aproximações

$$\tanh(x) \approx x, \qquad \tan(x) \approx x\,,$$

para obter, no limite em que $k_0 d \to 0$,

$$w \tanh(\xi\, w) = \frac{n_2^2}{n_1^2}\, u \tan(u) \quad \rightarrow \quad \xi\, w^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2}\, u^2 \quad \rightarrow \quad \xi\left(\bar{n}_0^2 - n_2^2\right) = \frac{n_2^2}{n_1^2}\left(n_1^2 - \bar{n}_0^2\right)$$

$$\therefore \quad \left(\xi + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)\bar{n}_0^2 = (1+\xi)\, n_2^2 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_0^2 = n_1^2 n_2^2\, \frac{1+\xi}{n_2^2 + \xi\, n_1^2}$$

em que se fez

$$\boxed{\bar{n}_0 = \lim_{v \to 0} (\bar{n})}\,.$$

Portanto, tem-se

$$\boxed{\bar{n}_0 = n_1 n_2 \sqrt{\frac{1+\xi}{n_2^2 + \xi\, n_1^2}}}\,.$$

Isto mostra que

$$\lim_{a \to 0} (\bar{n}_0) = n_1, \quad \lim_{a \to \infty} (\bar{n}_0) = n_2\,.$$

Portanto, é sempre $n_2 \le \bar{n}_0 < n_1$. Note-se que, no caso em que $a \to 0$, o modo fundamental TM_0 degenera no modo TEM de uma linha de planos paralelos preenchida por um dieléctrico homogéneo com um índice de refracção n_1, tendo-se então $\bar{n} \equiv n_2$ para todos os valores de $v \ge 0$.

Em síntese

Para um dado modo TE ou TM, o corte corresponde a $\bar{n} = 0$ e a transição rápido $\to$ lento a $\bar{n} = n_2$. Quando $f \to \infty$ vem $\bar{n} \to n_1$. Para um dado modo rápido a constante de propagação transversal s, no meio superior (i.e., para $d < x \le D$), varia no intervalo

$$\boxed{s_t = 0 \le s \le \sqrt{\frac{1-2\Delta}{2\Delta}}\; v_c = s_c},$$

com

$$\boxed{n_2 = n_1 \sqrt{1-2\Delta}}\,.$$

A frequência de corte v_c é a solução da seguinte equação (modos TE e TM):

$$\boxed{\sqrt{1-2\Delta}\,\tan(u_c) + \tan\left(\xi\, u_c \sqrt{1-2\Delta}\right) = 0} \mapsto \boxed{v_c = u_c \sqrt{2\Delta}}\,.$$

Para um dado modo lento a constante de atenuação transversal w varia no intervalo

$$\boxed{w_t = 0 \le w < v = w_\infty}\,.$$

Tem-se $s^2 = -w^2$, com

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sqrt{s^2 + v^2} \\ w &= \sqrt{v^2 - u^2} \end{aligned}}\,.$$

As frequências de transição v_t, em que $s = w = 0$ e $u = v$, são tais que

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Modos } \mathbf{TE} & \mapsto & \tan(v_t) = -\xi\, v_t \\ \text{Modos } \mathbf{TM} & \mapsto & v_t = \ell\,\pi, \quad \ell = 1, 2, 3, \ldots \end{array}}\,.$$

Os modos são designados da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} \text{Modos } \textbf{TE} & \mapsto & \mathrm{TE}_1, \mathrm{TE}_3, \mathrm{TE}_5, \ldots \\ \text{Modos } \textbf{TM} & \mapsto & \mathrm{TM}_0, \mathrm{TM}_2, \mathrm{TM}_4, \ldots \end{bmatrix}$$

O primeiro modo – o modo fundamental – é o modo TM_0. Este modo é sempre lento. Todos os restantes modos são rápidos para $v_c < v < v_t$ e lentos para $v > v_t$.

Tem-se, ainda,

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{n} &= n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{u}{v} \right)^2} \\ \bar{n} &= n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left[1 + \left(\frac{s}{v} \right)^2 \right]} \end{aligned}}\,.$$

As equações modais apresentam-se de seguida.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{MODOS} \\ \textbf{TE}\end{matrix}} \mapsto \begin{cases} \text{zona } \textbf{rápida} & \mapsto \quad \boxed{s \cot(\xi s) = -\sqrt{s^2 + v^2} \; \cot\left(\sqrt{s^2 + v^2} \right)} \\ \text{zona } \textbf{lenta} & \mapsto \quad \boxed{-\cot(u) = \dfrac{1}{u} \sqrt{v^2 - u^2} \; \coth\left(\xi \sqrt{v^2 - u^2} \right)} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\text{MODOS} \\ \textbf{TM}\end{matrix}} \mapsto \begin{cases} \text{zona } \textbf{rápida} & \mapsto \quad \boxed{s \tan(\xi s) = -(1 - 2\Delta) \sqrt{s^2 + v^2} \; \tan\left(\sqrt{s^2 + v^2} \right)} \\ \text{zona } \textbf{lenta} & \mapsto \quad \boxed{\tan(u) = \dfrac{1}{u} \dfrac{\sqrt{v^2 - u^2}}{1 - 2\Delta} \tanh\left(\xi \sqrt{v^2 - u^2} \right)} \end{cases}$$

Exemplo numérico

Consideremos, a título de exemplo, o seguinte caso concreto: $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$ e $\xi = a/d = 2$. De forma a especificar um determinado valor da frequência normalizada v vai-se sempre considerar a situação em que $d = \lambda/4$.

Nestas condições, vem:

$$\boxed{v = 2\,\pi\,\frac{d}{\lambda}\,n_1\sqrt{2\,\Delta} = 1.7562}\,,$$

$$\boxed{\Delta = \frac{5}{18} = 0.277\ldots \approx 27.78\,\%, \quad 2\,\Delta = \frac{5}{9}, \quad \bar{n}_0 = 1.1078}\,.$$

A frequência normalizada de corte v_c dos modos TE_1 e TM_2 (bifurcação modal) é dada por

$$\boxed{u_c = 1.3846 \quad \mapsto \quad v_c = 1.0320}\,.$$

Assim, nestas condições, o guia tem um regime de funcionamento monomodal desde que

$$\boxed{v < v_c = 1.0320}\,.$$

Os modos são rápidos quando $\bar{n} < n_2 = 1$ e lentos quando $\bar{n} > n_2 = 1$. Por sua vez, a frequência normalizada de transição (da zona rápida para a zona lenta) do modo TE_1 é dada por

$$\boxed{\sin(v_t) + \xi\,\cos(v_t) = 0} \quad \mapsto \quad \boxed{v_t = 1.8366}\,.$$

Outras frequências de transição apresentam-se a seguir.

$$\left[\begin{array}{lll} \mathrm{TE}_3 & \mapsto & v_t = 4.8158 \\ \mathrm{TE}_5 & \mapsto & v_t = 7.9171 \\ \mathrm{TE}_7 & \mapsto & v_t = 11.0408 \end{array}\right.$$

Já a frequência normalizada de transição do modo TM_2 é simplesmente dada por

$$\boxed{v_t = \pi = 3.1416}\,.$$

Estes resultados significam que os modos TM_0, TE_1 e TM_2 têm condições de propagação. O índice de refracção modal

$$\boxed{\textbf{Índice de refracção modal}} \mapsto \boxed{\bar{n} = \frac{\beta}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_g}}$$

do modo fundamental TM_0 (lento) é

$$\boxed{u = 1.1824} \quad \mapsto \quad \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{u}{v}\right)^2} \quad \mapsto \quad \boxed{\bar{n} = 1.2975}\,.$$

Por sua vez, o modo TE_1 tem condições de propagação na zona rápida. Por essa razão, vem

$$\boxed{s = 0.3663} \quad \mapsto \quad \bar{n} = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left[1 + \left(\frac{s}{v}\right)^2\right]} \quad \mapsto \quad \boxed{\bar{n} = 0.9724}\,.$$

Já os modos TM_2 e TE_1 estão ao corte: $v = 1.7562 < v_c = 1.9578$.

Suponhamos, agora, que escolhemos uma **nova** frequência normalizada v de operação, com

$$\boxed{v = 5}\,.$$

Determinemos, então, para o conjunto de parâmetros

$$\left(n_1 = 1.5, \quad n_2 = 1, \quad \xi = 2 \right),$$

a sequência de frequências (normalizadas) de corte, i.e., as sucessivas raízes v_c da equação

$$\boxed{\sqrt{1-2\Delta}\,\sin(u_c)\cos\left(\xi\, u_c \sqrt{1-2\Delta}\right) + \cos(u_c)\sin\left(\xi\, u_c \sqrt{1-2\Delta}\right) = 0} \mapsto \boxed{v_c = u_c \sqrt{2\Delta}}\,.$$

Obtêm-se, então,

$$\left[\begin{array}{lllll} \mathrm{TE}_1 \,\&\, \mathrm{TM}_2 & \mapsto & u_c = 1.3846 & \mapsto & v_c = 1.0320 \\ \mathrm{TE}_3 \,\&\, \mathrm{TM}_4 & \mapsto & u_c = 2.6267 & \mapsto & v_c = 1.9578 \\ \mathrm{TE}_5 \,\&\, \mathrm{TM}_6 & \mapsto & u_c = 4.1238 & \mapsto & v_c = 3.0737 \\ \mathrm{TE}_7 \,\&\, \mathrm{TM}_8 & \mapsto & u_c = 5.3010 & \mapsto & v_c = 3.9511 \\ \mathrm{TE}_9 \,\&\, \mathrm{TM}_{10} & \mapsto & u_c = 6.7981 & \mapsto & v_c = 5.0670 \end{array}\right.$$

Neste caso, quais os modos que se propagam? Naturalmente, como se viu, propaga-se – desde logo – o modo fundamental TM_0. Como se pode ver pela tabela anterior, o par de modos TE_9 e TM_{10} têm um valor de $v_c = 5.0670 > v = 5$ pelo que se encontram ao corte. Propagam-se, portanto, 9 modos TE e TM.

A seguir mostra-se o diagrama de dispersão para os modos TM nas condições numéricas aqui consideradas. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} n_1 = 1.5 \\ n_2 = 1 \\ \xi = 2 \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \Delta = \frac{5}{18} = 0.2777\ldots$$

Considera-se que $0 \le v \le 5$.